

# Agrandissement et compression d'images par induction

L. Condat<sup>1</sup>

A. Montanvert<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LIS (Laboratoire des Images et des Signaux) – Fédération ELESA  
961, rue de la Houille Blanche – BP 46  
38402 Saint Martin d'Hères cedex, France

{laurent.condat, annick.montanvert}@lis.inpg.fr

## Résumé

Une méthode originale d'agrandissement d'images fixes a été proposée récemment par D. Calle et al. [1, 2]. Bien que donnant des résultats visuels flatteurs, avec des contours nets et un contraste naturel, l'induction souffre sous sa forme itérative originelle d'un temps de calcul élevé. Nous améliorons la méthode en la reformulant au moyen de bancs de filtres et d'ondelettes, et proposons ainsi une implémentation directe beaucoup plus performante. Nous montrons ensuite comment l'induction peut être utilisée dans un schéma de compression d'images.

## Mots clefs

Agrandissement d'images, induction, compression.

## 1 Introduction

L'agrandissement d'images consiste à augmenter la résolution d'une image digitale, à partir d'un modèle adéquat de la scène représentée par l'image. Les méthodes d'interpolation linéaires [3], qui supposent que la scène est à bande limitée, introduisent soit un effet de flou global, soit des oscillations près des contours dans l'image agrandie. Les méthodes non-linéaires (e.g. [4]) autorisent leur modèle à être discontinu, et crèent ainsi des hautes fréquences permettant un meilleur rendu des contours. Mais aucune relation ne spécifie la cohérence entre l'image initiale et l'image agrandie.

Pour résoudre ce problème, une méthode appelée *induction* a été proposée [1, 2]. Elle vise à régulariser une image agrandie, obtenue préalablement en utilisant la méthode d'agrandissement de son choix, afin de restaurer l'information contenue dans l'image initiale, et mal exploitée lors de l'agrandissement. Plus précisément, l'agrandissement est défini comme *un problème inverse de la réduction* : l'image agrandie doit, si on la réduit, redonner l'image initiale, ce qui dérive du formalisme que nous proposons dans le §2 pour le redimensionnement d'images.

Dans le §3, nous rappelons le principe de l'induction, que nous généralisons dans le §4 en présentant une méthode de calcul rapide ainsi qu'une interprétation en termes de coefficients d'ondelettes. Enfin, le §5 est consacré aux perspectives offertes par l'induction pour la compression d'images.

## 2 Le redimensionnement d'images

Pour redimensionner une image, il faut avant tout connaître son processus de formation. Une image digitale est généralement produite par un dispositif d'acquisition ayant une certaine réponse impulsionnelle (PSF) gaussienne  $\Gamma(x)$ , qui modélise les différentes distorsions optiques et l'intégration faite par les éléments du capteur. Ainsi les pixels ( $I_k$ ) sont non pas des échantillons, mais plutôt des moyennes locales de la scène sous-jacente  $f(x)$  :

$$I_k = (f * \Gamma)(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Notez que nous utilisons des notations monodimensionnelles par simplicité, et du fait que les traitements dont nous parlons sont séparables : ils sont effectués d'abord sur les lignes de l'image, puis sur les colonnes.

Nous pouvons maintenant définir  $I^{(\alpha)}$ , l'image  $I$  redimensionnée d'un facteur  $\alpha$ , comme l'image qui aurait été fournie par le même dispositif d'acquisition si la scène avait été dilatée d'un facteur  $\alpha$  :

$$I_k^{(\alpha)} = (f(\alpha \cdot) * \Gamma)(k) = \frac{1}{\alpha} (f * \Gamma(\cdot/\alpha))(\alpha \cdot k) \quad \forall k \quad (2)$$

Si  $\alpha > 1$ , nous faisons une réduction, sinon un agrandissement. Supposons ensuite que  $\Gamma(x)$  vérifie une relation à deux échelles de facteur de dilatation  $n \geq 2$  :

$$\Gamma(x/n) = n \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_k \Gamma(x - k) \quad (3)$$

En combinant (2) and (3), on obtient un moyen simple de réduire une image d'un facteur entier  $n$ , par filtrage puis décimation, symbolisée par l'opérateur  $[\cdot] \downarrow n : (X_k) \mapsto (X_{nk})$  :

$$I^{(n)} = [I * R] \downarrow n \quad (4)$$

Cette méthode de réduction est la méthode usuelle : le filtre passe-bas  $R$  supprime les hautes fréquences et évite le repliement de spectre dans l'image réduite, en accord avec le théorème de Shannon. Notre formalisme permet de justifier cette méthode, et d'expliquer pourquoi le filtre  $R$  doit avoir une fonction limite  $\Gamma(x)$  proche d'une gaussienne, comme cela est préconisé par Burt [5]. En pratique, le PSF  $\Gamma(x)$

est souvent inconnu, et il faut choisir directement  $R$  avec de bonnes propriétés (c'est-à-dire vérifiant les contraintes de Burt [5]).

Cela dit, le problème de l'agrandissement n'est pas résolu, puisque le scène  $f$  est inconnue, donc on ne peut pas calculer d'image agrandie grâce à (2). Mais avec notre formalisme, un agrandissement suivi d'une réduction de même facteur redonne l'image initiale. On dira alors que l'image agrandie vérifie la *contrainte de réduction*. L'agrandissement est donc un problème inverse de la réduction.

### 3 L'induction

Etant donnée une image  $I$  que l'on veut agrandir, et un filtre de réduction  $R$  fixé, il y a tout un ensemble d'images, appelé *ensemble induit*, d'images agrandies qui vérifient la contrainte de réduction. Donnons-nous une méthode d'agrandissement, qui ne vérifie pas cette contrainte, mais qui donne des images plaisantes. Appelons *image inductrice* l'image  $J$  obtenue en agrandissant  $I$  au moyen de cette méthode. L'induction consiste alors à calculer la projection orthogonale de  $J$  dans l'ensemble induit, afin d'obtenir une *image induite*  $K$  vérifiant la contrainte de réduction, tout en étant proche visuellement de l'image inductrice. Ce principe est illustré sur la Figure 1.

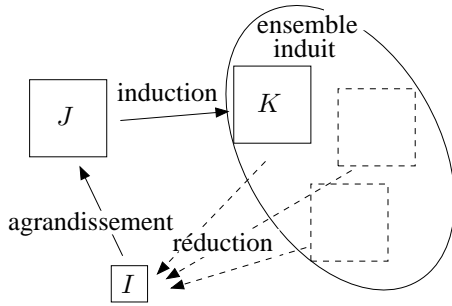


Figure 1 – Principe de l'induction

Détaillons le calcul de l'image induite, en supposant un agrandissement d'un facteur 2 et un filtre de réduction  $R$  (supposé symétrique dans tout l'article). L'ensemble induit est l'intersection des ensembles  $\Omega^{(i,j)}$  correspondant aux images satisfaisant la contrainte de réduction au pixel  $(i, j)$ . Chaque  $\Omega^{(i,j)}$  est un hyperplan affine, donc un ensemble convexe, défini par :

$$\Omega^{(i,j)} = \{X \mid \langle H^{(2i,2j)} \mid X \rangle = I_{(i,j)}\} \quad (5)$$

où l'ensemble des images de taille  $N * M$  est identifié à  $\mathbb{R}^{N.M}$  muni de son produit scalaire  $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$  et de sa norme  $\|\cdot\|$  usuels, et où  $H^{(i,j)}$  est le masque formé du filtre  $R$  centré au pixel  $(i, j)$ , vu comme une image.

L'induction est une méthode itérative, basée sur des méthodes de projection sur des intersections d'ensembles convexes (POCS). La méthode de projection la plus simple (dite "méthode de projections alternées") consiste, lors de la  $n^{\text{ème}}$  itération, à projeter successivement l'image

courante  $J^n$  sur chacun des ensembles  $\Omega^{(i,j)}$ . La projection orthogonale sur  $\Omega^{(i,j)}$  se calcule en place comme suit :

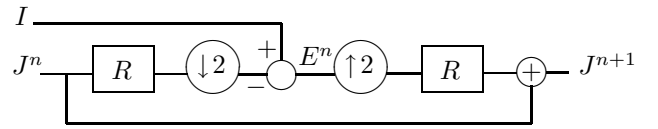
$$\text{Proj}_{\Omega^{(i,j)}}(X) = X + \frac{I_{(i,j)} - \langle H^{(2i,2j)} \mid X \rangle}{\|H^{(2i,2j)}\|^2} H^{(2i,2j)} \quad (6)$$

En prenant l'image inductrice  $J = J^0$  comme image initiale, on obtient à la convergence de l'algorithme, qui est quasiment obtenue après 3 ou 4 itérations, l'image induite  $K = J^\infty$ , la plus proche au sens  $\ell_2$  de l'image inductrice et vérifiant la contrainte de réduction.

## 4 L'induction oblique rapide

### 4.1 L'induction rapide

Nous allons montrer dans ce paragraphe comment calculer directement l'image induite, par une méthode rapide et non-itérative. Considérons d'abord le schéma itératif suivant, qui consiste à rétroprojeter dans l'image inductrice l'erreur entre sa version réduite et l'image initiale  $I$ . Tous les pixels sont corrigés en même temps lors d'une itération, et non plus successivement comme auparavant :



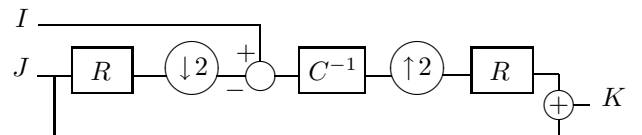
où l'opérateur d'expansion  $[\cdot] \uparrow 2$  double la résolution de l'image en insérant des pixels nuls. Si on note  $E = \sum_{n \in \mathbb{N}} E^n$ , on obtient :

$$K = J + [E] \uparrow 2 * R \quad (7)$$

Comme  $K$  vérifie la contrainte de réduction, on a :

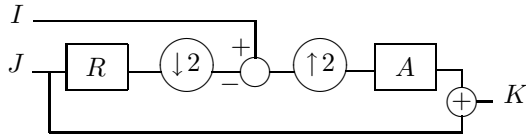
$$\begin{aligned} [K * R] \downarrow 2 &= I \\ \Leftrightarrow [(J + [E] \uparrow 2 * R) * R] \downarrow 2 &= I \\ \Leftrightarrow [J * R] \downarrow 2 + E * [R * R] \downarrow 2 &= I \\ \Leftrightarrow E &= (I - [J * R] \downarrow 2) * ([R * R] \downarrow 2)^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

Ainsi, pour le coût d'une seule itération, on peut calculer directement l'image induite, en rajoutant simplement un filtrage inverse  $C^{-1} = ([R * R] \downarrow 2)^{-1}$  qui annule la corrélation entre  $R$  et ses translats. Ce nouveau schéma est séparable et s'implémente ainsi :



### 4.2 L'induction oblique

On peut maintenant généraliser l'induction en changeant le filtre d'agrandissement  $A$ , qui doit seulement être biorthogonal à  $R$  (c'est-à-dire  $A$  doit vérifier  $[R * A] \downarrow 2 = \delta_0$ ) :



On se retrouve dans le cas précédent lorsque  $A$  est le dual de  $R$ , c'est-à-dire lorsque sa transformée en  $z$  est :

$$A(z) = \frac{2.R(z^{-1})}{R(z)R(z^{-1}) + R(-z)R(-z^{-1})} \quad (9)$$

Dans le cas général, on dira que l'on réalise une *induction oblique*, puisqu'on projette toujours l'image induite dans l'ensemble induit, mais plus nécessairement orthogonalement. Lorsque l'inductrice est nulle (tous ses pixels à zéro), l'induction revient simplement à faire un agrandissement par filtrage linéaire avec le filtre  $A$ .

### 4.3 Résultats

Dans la suite,  $R$  et  $A$  sont les filtres biorthogonaux Daub9 et Daub7 utilisés dans JPEG2000 [6], et l'image induite est générée en utilisant la méthode d'interpolation non-linéaire, simple et efficace, proposée par Ramponi *et al.* [4]. La Figure 2 illustre les bons résultats obtenus en agrandissant une partie de l'image *camera* d'un facteur 4 par induction oblique (deux agrandissements successifs de facteur 2). Le contraste est naturel et les bords sont nets, contrairement aux méthodes d'interpolation qui donnent des images agrandies floues. D'ailleurs, l'agrandissement par interpolation est incohérent avec notre modèle de formation d'images : il faudrait que  $\Gamma(x)$  soit une masse de Dirac, ce qui est impossible pour un capteur, et donnerait des images digitales polluées par le repliement de spectre.



Figure 2 – Partie de l'image *camera* agrandie d'un facteur 4. (a) : par interpolation spline cubique. (b) : par induction

### 4.4 Interprétation en termes d'ondelettes

La figure 3 nous montre la décomposition en ondelettes (avec les filtres Daub9/7), sur deux niveaux, de l'image *ca-*

*mera* agrandie d'un facteur 2 par induction oblique comme dans le paragraphe précédent. L'imagette en haut à gauche est en fait identique à l'image initiale  $I$ , car l'image induite  $K$  vérifie la contrainte de réduction pour le filtre  $R$ =Daub9. Lorsque l'inductrice est nulle, les coefficients d'ondelettes à la résolution de l'image agrandie sont nuls. Par contre, si l'inductrice est obtenue en utilisant une méthode d'agrandissement non-linéaire préservant les contours, des coefficients d'ondelettes cohérents sont créés. L'induction réalise donc une extrapolation fréquentielle, implicitement déléguée à la méthode d'agrandissement qui génère l'inductrice.



Figure 3 – Décomposition en ondelettes de l'image *camera* agrandie d'un facteur 2 par induction. L'inductrice est : à gauche, nulle, à droite, obtenue par la méthode de Ramponi *et al.*

Afin de préciser la nature des coefficients d'ondelettes créés, notons respectivement  $\tilde{I}$  et  $\check{I}$  les images induites obtenues après induction orthogonale et oblique, en utilisant dans les deux cas une inductrice nulle. Parmi l'ensemble induit  $\Omega$ ,  $\tilde{I}$  est l'image de norme  $\ell_2$  minimale.  $\check{I}$  peut être vue comme  $\tilde{I}$  + une composante haute fréquence, sous forme de coefficients d'ondelettes, prédite linéairement à partir de  $\tilde{I}$ . Ce principe est illustré sur la figure 4, où l'on a défini l'espace vectoriel  $V_R$  généré par  $R$  et ses translats :  $V_R = \text{Vect}((H^{(2i,2j)})_{(i,j)})$ , et  $V_A$  de la même manière.

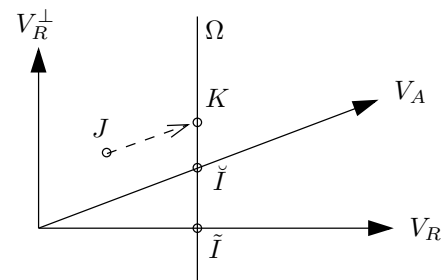


Figure 4 – L'induction oblique

Ainsi l'image induite obtenue par induction oblique s'écrit :

$$K = \check{I} + U \quad (10)$$

où  $U$  est la projection de  $J$  sur  $V_R^{\perp}$  parallèlement à  $V_A$ . L'induction oblique consiste donc à extraire la partie haute

fréquence de l'image inductrice qui ne peut pas être prédite linéairement. Par conséquent, l'inductrice *doit être calculée en utilisant une méthode d'agrandissement non-linéaire*. Si la méthode est linéaire, on peut trouver un filtre  $A$  tel que  $K = [I] \uparrow 2 * A$ , et l'induction perd alors son intérêt.

## 5 Application à la compression

Considérons le schéma de compression rudimentaire suivant : une image  $O$  est réduite avec le filtre  $R$  pour donner une image  $I$  : c'est la compression. La décompression consiste à agrandir  $I$  par induction oblique, avec les filtres Daub9/7. On mesure alors le PSNR entre l'image induite  $K$ , et  $O$ . Les résultats sont donnés dans le Tableau 1, pour plusieurs images utilisées dans la littérature. L'induction est comparée à une étape d'analyse/synthèse passe-bas avec les filtres Daub9/7, ce qui revient à faire l'induction sur  $I$  avec une inductrice nulle. Afin d'évaluer le rôle de la méthode utilisée pour générer l'inductrice, nous avons comparé la méthode de Ramponi *et al.* à une autre méthode d'interpolation non-linéaire utilisant des filtres médians [7]. Comme on peut le voir, le gain est sensible avec l'induction, surtout avec la première méthode : les coefficients d'ondelettes prédits sont non seulement pertinents visuellement, mais ils constituent aussi une bonne prédiction des coefficients d'ondelettes de  $O$  à la résolution la plus fine, perdus lors de la réduction.

image	Daub9/7	induction Ramponi	induction Médian
camera	26.96	<b>27.23</b>	27.15
peppers	33.47	<b>34.93</b>	33.84
lena	35.26	35.24	<b>35.43</b>
barbara	25.85	<b>25.94</b>	25.63
bike	26.39	<b>27.15</b>	26.86
cafe	23.60	<b>23.84</b>	23.74

Tableau 1 – Résultats numériques après une étape de réduction/agrandissement, sans et avec induction oblique

On peut donc insérer notre schéma d'induction dans un codeur à base d'ondelettes : à chaque niveau de résolution, on soustrait aux coefficients d'ondelettes les coefficients prédits par induction à partir des niveaux inférieurs. On diminue ainsi l'entropie de la pyramide de coefficients d'ondelettes. Cependant, nos expérimentations n'ont pas révélé d'amélioration sensible de la courbe débit/distorsion lorsqu'on insère l'induction dans un codeur de type SPIHT [8] ou JPEG2000. En effet, lors du décodage de l'image compressée avec pertes, les images que l'on cherche à agrandir par induction sont dégradées à cause de la quantification des coefficients d'ondelettes. Or l'agrandissement par induction n'est efficace que sur des images présentant des contours nets, où les hautes fréquences à la résolution supérieure peuvent être prédites.

Par contre, les résultats du Tableau 1 suggèrent qu'il est judicieux d'utiliser l'induction dans le cas d'un codage pro-

gressif par rapport à la résolution (comme dans la pyramide laplacienne [5]), et non par rapport à la qualité. Ainsi, au décodage, l'image est reconstruite avec une résolution croissante au fur à mesure que le flux de bits est reçu, ce qui est intéressant pour de l'affichage en temps réel lors d'une transmission sur un canal peu rapide. L'induction étant peu gourmande en calcul, on peut l'utiliser pour améliorer visuellement l'image, qui s'affiche au départ avec une résolution grossière puis de plus en plus fine.

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons amélioré une méthode originale d'agrandissement d'images, qui consiste à considérer l'agrandissement comme un problème inverse de la réduction. La réduction d'une image digitale est une opération simple, comme on l'a montré grâce au formalisme introduit pour le redimensionnement d'images. Un agrandissement cohérent avec notre modèle est rendu possible par l'induction, méthode rapide et efficace.

D'autres méthodes d'agrandissement, plus complexe que la simple interpolation non-linéaire de Ramponi *et al.*, devront être testées et étudiées, pour le calcul de l'image inductrice. Cela permettra sans doute d'obtenir des résultats en compression plus conséquents. Sur ce point, la possibilité d'insérer l'induction, comme étape de prédiction supplémentaire d'un schéma lifting, dans un compresseur sans pertes, semble prometteuse.

## Références

- [1] D. Calle et A. Montanvert. Super-resolution inducing of an image. Dans *Proc. of ICIP'98*, pages 232–236, 1998.
- [2] D. Calle. *Agrandissement d'images par synthèse de similarités et par induction sur un ensemble*. Thèse de doctorat, Université J. Fourier - Grenoble, Nov. 1999.
- [3] T. M. Lehmann, C. Gönner, et K. Spitzer. Survey : Interpolation methods in medical image processing. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 18(11) :1049–1075, Nov. 1999.
- [4] G. Ramponi et S. Carrato. Interpolation of the DC component of coded images using a rational filter. Dans *Proc. of ICIP'97*, 1997.
- [5] P. J. Burt et E. H. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Trans. Communications*, 31(4) :532–540, Avril 1983.
- [6] D. S. Taubman et M. W. Marcellin. *JPEG2000 : Image Compression Fundamentals, Standard and Practice*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [7] B. Zeng et A. N. Venetsanopoulos. Image interpolation based on median-type filters. *Optical Engineering*, 37(9) :2472–2482, Septembre 1998.
- [8] A. Said et W. A. Pearlman. A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Tech.*, 6(3) :243–250, Juin 1996.