

# Codage de sources distribuées : Analyse de performances et extension à trois sources

Khaled Lajnef<sup>1</sup>

Christine Guillemot<sup>1</sup>

Pierre Siohan<sup>2</sup>

<sup>1</sup> IRISA/INRIA, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES

<sup>2</sup> France Télécom R&D, 4 rue du Clos Courtel, B.P 59, 35512 RENNES

<sup>1</sup> {prenom.nom}@irisa.fr <sup>2</sup> {pierre.siohan}@francetelecom.com

## Résumé

Cet article porte sur l'analyse des performances de la compression de deux et trois sources corrélées à valeurs discrètes en utilisant la technique du codage turbo. Dans ce cadre, nous proposons une solution basée sur le poinçonnage des sorties du codeur turbo pour atteindre le taux de compression désiré et approcher la limite théorique de Slepian-Wolf [1]. Pour deux sources, nos résultats de simulation donnent une amélioration significative par rapport aux travaux antérieurs. L'extension au cas de trois sources corrélées offre de nouvelles perspectives d'application du codage de sources distribuées. Cette dernière approche nous a permis d'atteindre les bornes théoriques avec des corrélations plus faibles.

## Mots clefs

Compression, Codage de sources distribuées, Théorème de Slepian-Wolf, Turbo Codes.

## 1 Introduction

Le codage de sources distribuées a pour but de compresser des signaux fortement corrélés que l'on code séparément et décode conjointement. Cette structure s'applique aux réseaux de capteurs, qui transmettent des informations fortement corrélées à une unité de traitement centrale, mais également aux systèmes de compression vidéo. D'un point de vue théorique, le codage de sources distribuées s'appuie sur le théorème de Slepian-Wolf [1] établi en 1973. Il montre la possibilité de réaliser, sans perte de compression, un codage séparé (au lieu de conjoint) de 2 sources corrélées  $Y$  et  $Z$  à valeurs discrètes avec un débit  $R_Z + R_Y \geq H(Y, Z)$ ,  $R_Z \geq H(Z/Y)$  et  $R_Y \geq H(Y/Z)$ . Plus tard ce résultat a été étendu par Wyner et Ziv [2] au cas de sources gaussiennes à valeurs continues. Ici nous nous intéressons au codage de sources à valeurs discrètes.

Bien que la limite théorique du codage de deux sources distribuées à valeurs discrètes ait été établie en 1973, ce n'est que très récemment que des mises en œuvre concrètes ont été proposées afin d'approcher au mieux cette borne. Celles-ci se basent souvent sur des techniques de codage de canal, en utilisant par exemple des codes convolutifs [3],

turbo codes [4] ou LDPC [5].

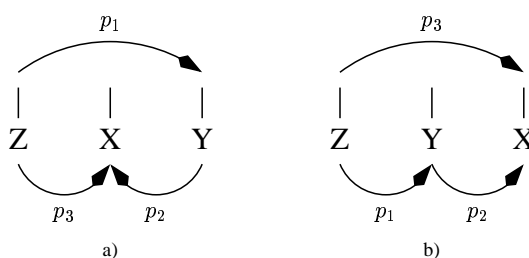


Figure 1 – Exemples d'application du codage de trois sources distribuées: a) Prédiction avant et prédiction bi-directionnelle, b) Prédiction multi-hypothèse.

Cet article est organisé comme suit. Dans une première partie (section 2), nous présentons une analyse des performances de la compression de deux sources utilisant un turbo code poinçonné qui permet d'améliorer les performances par rapport aux résultats publiés à ce jour [4]. Dans la section 3, nous considérons le cas de la compression de trois sources corrélées à valeurs discrètes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Nous étendons ici le théorème de Slepian-Wolf au cas de sources multiples. Un exemple d'application de cette approche est le codage prédictif bi-directionnel ou multi-hypothèse (figure 1) dans les systèmes de compression vidéo. Les sources  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont compressées respectivement à des débits  $H(X/Y, Z)$ ,  $H(Y/Z)$  et  $H(Z)$  ( $H(X, Y, Z) = H(X/Y, Z) + H(Y/Z) + H(Z)$ ). La section 4 présente les résultats de simulation pour le cas de trois sources. Enfin, dans la section 5 nous concluons.

## 2 Cas de 2 sources

Soient deux sources *i.i.d* corrélées  $Y$  et  $Z$ . Pour un scénario asymétrique, la source  $Z$  est compressée à son taux entropique  $H(Z)$  et la source  $Y$  est codée (avec un codeur canal) et compressée à un taux proche de  $H(Y/Z)$ . La figure 2 illustre le schéma du codage et décodage utilisé dans [4]. Les auteurs utilisent dans ce cas un codeur Convolutif Systématique et Récursif (CSR) de taux  $\frac{n-1}{n}$ . Pour assurer un taux de compression égal à  $\frac{n-1}{2}$  pour la source  $Y$ , les bits systématiques des deux codeurs

élémentaires ne sont pas transmis.

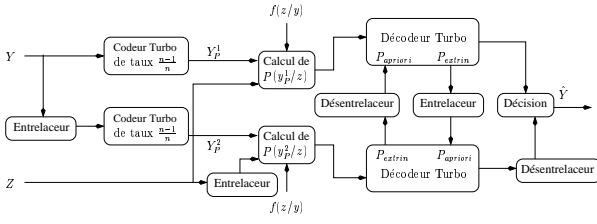


Figure 2 – Schéma de codage et décodage de l'approche de [4].

Pour  $n = 5$  avec un codeur élémentaire de longueur de contrainte  $K = 5$ , la figure 3 présente le résultat obtenu dans [4]. Il se situe à 0.154 de la limite théorique, égale à 0.5 pour un taux de compression 2:1 de la source  $Y$ , pour une taille d'entrelaceur de  $10^5$ . Dans la figure 3, on trouve aussi les performances obtenues dans [5] qui sont à 0.034 de la même limite.

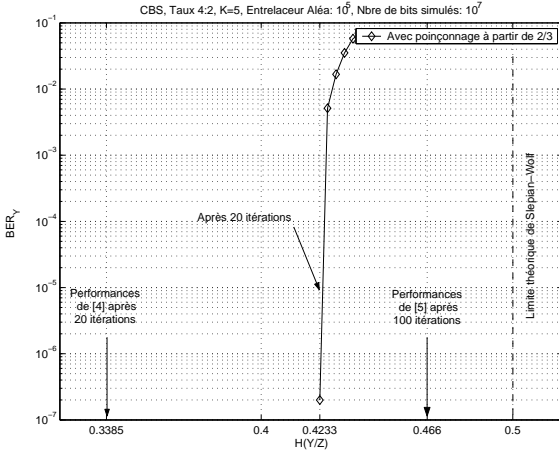


Figure 3 – Performance du codage des sources  $(Y, Z)$  distribuées où  $Z$  est non compressée et  $Y$  est compressée à 4:2 avec un code turbo poinçonné dont le codeur élémentaire est de taux 2/3, de mémoire 4 et taille d'entrelaceur:  $10^5$ .

Nos résultats de simulation, illustrés dans la figure 3, montrent que nous nous situons à 0.0767 de la limite théorique avec un codeur élémentaire de longueur de contrainte  $K = 5$  et un taux de codage 1/2 ou 2/3. Ici, les bits systématiques ne sont pas transmis.

Notre solution se base sur un turbo code qui poinçonne les bits de parité. Il est montré dans [6] que les performances des codes poinçonnés obtenus à partir des codes élémentaires à faible taux de codage (une grande valeur de la distance libre  $d_{free}$  avec une meilleure distribution des poids de Hamming) sont meilleurs que ceux à taux de codage élevé. D'ailleurs, pour avoir un taux de codage  $R = 4/5$ , le tableau 1 montre bien que la distance  $d_{free}$  du code élémentaire poinçonné issu d'un codeur CSR initial de taux 1/2 est plus grande que celle d'un codeur CSR initial de taux 4/5. Le spectre est obtenu à partir des treillis des codes avec  $a_n$  et  $c_n$  qui sont respectivement le nombre

de chemins et le poids total de ces chemins. Plus la valeur de  $c_n$  est faible, meilleur est le code.  $P$  est la matrice de poinçonnage.

Outre un gain en performance par rapport au codeur utilisé par [4] (taux de codage 4/5 du codeur élémentaire), le poinçonnage des turbo codes (utilisant un codeur élémentaire initial de taux 1/2 pour avoir 4/5 après poinçonnage) diminue le temps de calcul au codage et au décodage (moins de branches dans le treillis du codeur final).

Tableau 1 – Spectre des distributions de poids des codeurs élémentaires avec une mémoire 4.

Code initial				
$R$	$G$	$d_{free}$	$a_n, n = d_{free}, d_{free} + 1, \dots$	$c_n, n = d_{free}, d_{free} + 1, \dots$
4/5	$G_1 = 23 \ G_2 = 35$ $G_3 = 27 \ G_4 = 37 \ G_5 = 31$	3	7,66,317,1055,2387,4623,6898	18,209,1225,4798,12688,28226,47115
Code initial		Code poinçonné		
$R$	$G$	$P$	$d_{free}$	$a_n, n = d_{free}, d_{free} + 1, \dots$
1/2	$G_1 = 35 \ G_2 = 23$	1111 0100	4	3,13,48,176,509,1141,2089 10,50,230,972,3218,8206,16724

### 3 Cas de 3 sources

Considérons un système à trois sources *i.i.d* corrélées  $X, Y$  et  $Z$  avec des probabilités conditionnelles  $P(Y \neq Z/Z) = p_1$ ,  $P(X \neq Y/Y) = p_2$  et  $P(X \neq Z/Z) = p_3$ . Entre les sources  $Z$  et  $Y$ , on a un canal binaire symétrique caractérisé par la probabilité de transition  $p_1$ . La corrélation entre les sources  $X$  et  $(Y, Z)$  est modélisée par le canal illustré dans la figure 4. Ici, pour simplifier les calculs, nous avons imposé une condition de symétrie telle que :  $P(X = i/Y = j, Z = k) = P(X \neq i/Y \neq j, Z \neq k)$  pour  $i, j, k \in \{0, 1\}$ . Ainsi, nous avons les expressions suivantes:

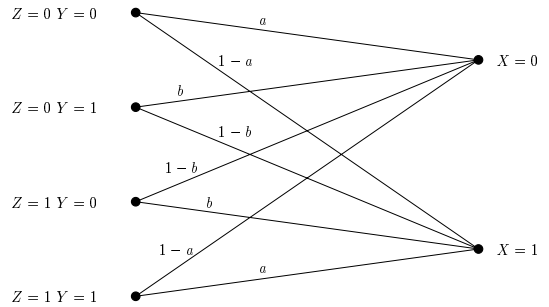


Figure 4 – Canal symétrique pour trois sources.

$$P(X = Z/Y = Z) = a \quad (1)$$

$$P(X \neq Z/Y = Z) = 1 - a \quad (2)$$

$$P(X = Z/Y \neq Z) = b \quad (3)$$

$$P(X = Y/Y \neq Z) = 1 - b \quad (4)$$

avec  $a$  et  $b \in [0, 1]$  qui peuvent être exprimés en fonction de  $p_1, p_2$  et  $p_3$ . En effet,

$$\begin{aligned} P(X = 0/Z = 0) &= \frac{\sum_Y P(X = 0, Y, Z = 0)}{P(Z = 0)} \\ &= a(1 - p_1) + bp_1 = 1 - p_3 \end{aligned} \quad (5)$$

de même on a :

$$P(X = 0/Y = 1) = bp_1 + (1 - a)(1 - p_1) = p_2 \quad (6)$$

d'où:

$$a = \frac{2 - (p_1 + p_2 + p_3)}{2(1 - p_1)} \quad (7)$$

$$b = \frac{p_1 + p_2 - p_3}{2p_1} \quad (8)$$

Les différentes probabilités conditionnelles  $P(Y, Z/X)$  peuvent être exprimées par :

$$P(Y = Z = X/X) = a(1 - p_1) \quad (9)$$

$$P(Y \neq Z = X/X) = bp_1 \quad (10)$$

$$P(Y = X \neq Z/X) = (1 - b)p_1 \quad (11)$$

$$P(Y = Z \neq X/X) = (1 - a)(1 - p_1) \quad (12)$$

Par conséquent, les limites théoriques de trois sources sont données par:

$$H(Y/Z) = -p_1 \log_2(p_1) - (1 - p_1) \log_2(1 - p_1) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} H(X/Y, Z) &= p_1 \log_2(p_1) + (1 - p_1) \log_2(1 - p_1) \\ &- (1 - \frac{p_1 + p_2 + p_3}{2}) \log_2(1 - \frac{p_1 + p_2 + p_3}{2}) \\ &- [\frac{p_1 + p_2 - p_3}{2} \log_2(\frac{p_1 + p_2 - p_3}{2}) \\ &+ \frac{p_1 - p_2 + p_3}{2} \log_2(\frac{p_1 - p_2 + p_3}{2}) \\ &+ \frac{-p_1 + p_2 + p_3}{2} \log_2(\frac{-p_1 + p_2 + p_3}{2})] \quad (14) \end{aligned}$$

Dans la figure 5, nous proposons une architecture de codage étendant le principe turbo au cas de trois sources distribuées. Les trois sources sont codées séparément et décodées conjointement.

Chaque encodeur (X et Y) est constitué de deux codeurs élémentaires CSR montés en parallèle et séparés par un entrelaceur comme l'indique la partie codage de la figure 2. Vu que l'information de bord Z est disponible au décodage, les deux sources X et Y sont compressées à des taux plus faibles que leurs entropies respectives. La source Y sera compressée à  $H(Y/Z)$ . Quant à la source X, puisque au décodage on dispose d'une information de bord de plus, qui est  $\hat{Y}$ , elle sera compressée à  $H(X/Y, Z)$ . Par conséquent, seulement les bits de parité à la sortie de chaque encodeur sont poinçonnés et transmis sans bruit vers les décodeurs correspondants.

Au décodage, chaque décodeur (X et Y) est un décodeur turbo itératif composé de deux décodeurs SISO (Soft-In Soft-Out) concaténés en série à travers un entrelaceur ou un désentrelaceur. A chaque itération, le décodeur Y envoie l'estimée  $\hat{Y}$  vers le décodeur X. Ce dernier dispose en plus de l'information sur Z pour décoder la source X. Tant que les performances, en terme de taux d'erreur binaire, de la source Y sont bonnes (entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$ ), alors il n'y aura pas une grande erreur sur l'estimation de la source X.

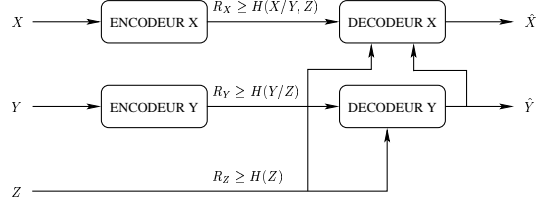


Figure 5 – Schéma de codage et décodage de 3 sources corrélées.

## 4 Résultats de simulation

Tous les résultats de simulation présentés sont réalisés avec un codeur CRS de taux de codage 2/3, de longueur de contrainte  $K = 5$ . Le vecteur générateur du code élémentaire est  $G = (1, 23, 35/33)$ , l'entrelaceur est aléatoire et de taille  $10^5$ , le nombre de bits simulés est  $10^7$  et enfin l'algorithme de décodage est le MAP (Maximum A Posteriori).

Pour  $p_1 = p_2 = p_3$ , la figure 7-(a) compare les performances obtenues pour la source Y compressée avec un facteur 3:1 et décodée conjointement avec Z (cas de deux sources) et celles obtenues avec la source X compressée à 3:1 conditionnellement à Y (compressée à 2:1) et Z. L'approche "trois sources" permet d'obtenir les mêmes performances que le cas "deux sources" avec moins d'itérations (9 au lieu de 12) et une corrélation plus faible ( $p_1 = p_2 = p_3 = 0.065$  au lieu de  $p_1 = 0.045$ ). La figure 6-(a) compare les performances entre le cas 2 sources (Y compressée à 2:1,  $H(Z) = 1$ ) et le cas 3 sources où X est compressée à 2:1 et Y et Z sont non codées ( $H(Y) = H(Z) = 1$  bit). On peut voir que le codage de 3 sources distribuées permet d'obtenir une entropie  $H(X/Y, Z) = 0.4248$  après 18 itérations contre  $H(Y/Z) = 0.4233$  dans le cas de 2 sources, donc permet de se rapprocher davantage de la borne théorique 0.5 pour une corrélation plus faible ( $p_1 = p_2 = p_3 = 0.116$  au lieu de  $p_1 = 0.0861$ ).

Dans la figure 6-(b) qui correspond au cas de prédiction multi-hypothèse, le taux de compression des sources X et Y est égal à 2:1. Si  $p_1 = 0.0861$ ,  $p_2 = 0.09$  et  $p_3$  qui varie, alors le débit de  $H(X/Y, Z)$  est égal à 0.4237 (pour  $p_3 = 0.136$ ) après 16 itérations, soit meilleur de 0.0004 bits que l'entropie conditionnelle  $H(Y/Z)$ .

Dans la figure 7-(b), cas de prédiction bi-directionnelle, nous avons d'une part fait varier  $p_2 = p_3 \leq p_1$  et d'autre part fixé  $p_1 = 0.0861$ , ce qui correspond à la limite de performance du codage de deux sources corrélées ( $H(Y/Z) = 0.4233$ ). Les résultats de simulation, avec X compressée à 6:1 et Y à 2:1, indiquent que le débit  $H(X/Y, Z) = 0.1371$  (pour un  $p_2 = p_3 = 0.0489$ ) après 17 itérations est à 0.0296 de la limite théorique ( $0.1667=1/6$ ). Cependant, pour un même taux de compression 6:1 de la source Y (cas de 2 sources) et après 17 itérations, la figure 7-(b) montre aussi que le débit  $H(Y/Z) = 0.1207$  pour un  $p_1 = 0.0164$ , c'est-à-dire une corrélation plus grande, est à 0.046 de la borne.

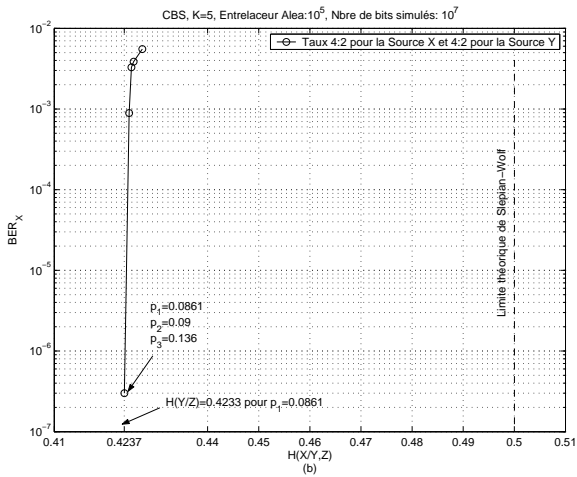
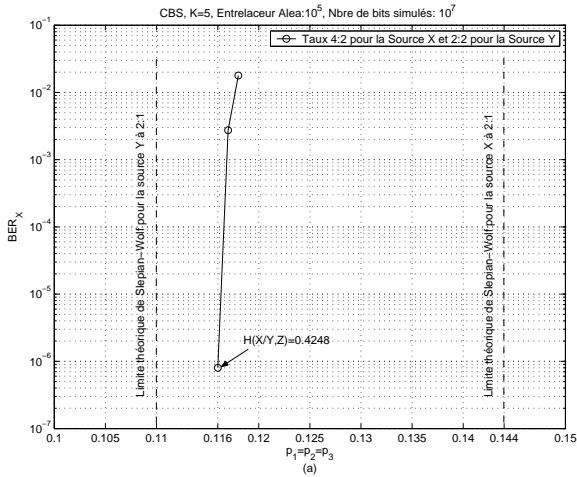


Figure 6 – Résultats de simulation pour 3 sources à valeurs discrètes avec une taille d’entrelaceur  $10^5$ : (a)  $X$  est compressée à 2:1 et  $Y$  à 2:2, (b)  $X$  et  $Y$  sont compressées à 2:1.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article le codage de 2 et 3 sources distribuées utilisant des turbo codes poinçonnés. Les résultats de simulation ont montré que notre solution donne de meilleures performances que celle décrite dans [4]. Pour la technique du codage de trois sources distribuées, nous avons montré que le gain apporté par celle-ci est de permettre la compression des sources avec des corrélations plus faibles que dans le cas de deux sources. Nous avons remarqué que plus le taux de compression est élevé, meilleures seront les performances du cas trois sources par rapport au cas de deux sources.

## Références

[1] D. Slepian and J. K. Wolf, “Noiseless Coding of Correlated Information Sources”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-19, pp. 471-480, Mar. 1973.

[2] A. D. Wyner and J. Ziv, “The Rate-Distortion Function for Source Coding with Side Information at the Deco-

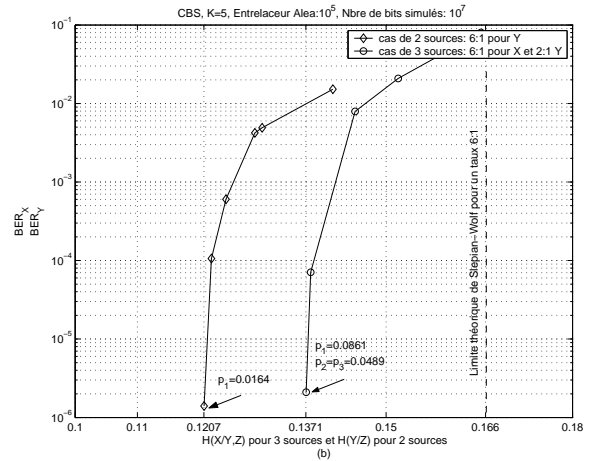
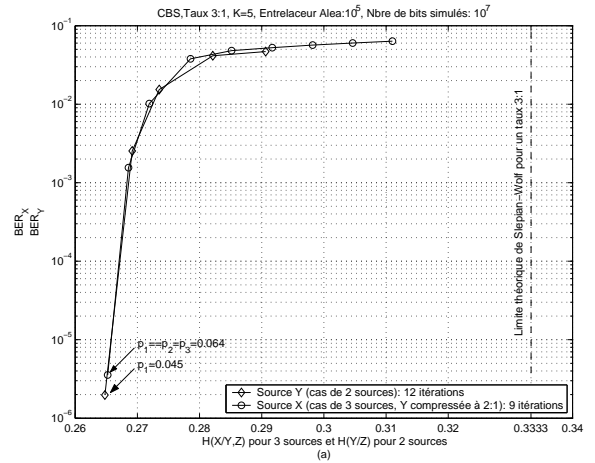


Figure 7 – Résultats de simulation pour des sources à valeurs discrètes avec une taille d’entrelaceur  $10^5$ : (a) cas de 3 sources :  $X$  est compressée à 3:1 et  $Y$  à 2:1, cas de 2 sources :  $Y$  est compressée à 3:1, (b) cas de 3 sources :  $X$  est compressée à 6:1 et  $Y$  à 2:1, cas de 2 sources :  $Y$  est compressée à 6:1.

der”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol-22, pp. 1-10, Jan. 1976.

[3] S.S. Pradhan and K. Ramchandran, “Distributed Source Coding Using Syndromes (DISCUS): Design and Construction”, *Proc. IEEE DCC*, pp. 158-167, Mar. 1999.

[4] A. Aaron and B. Girod, “Compression with Side Information using Turbo Codes”, *Proc. IEEE DCC*, pp. 252-261, Apr. 2002.

[5] A. D. Liveris, Z. Xiong and C. N. Georghiades, “Compression of Binary Sources with Side Information at the Decoder using LDPC Codes”, *IEEE Comm. Letters*, Vol-6, pp. 440-442, Oct. 2002.

[6] G. Begin and D. Haccoun, “High Rate Punctured Convolutional Code Structure Properties and Construction Techniques”, *IEEE Trans. Comm.*, Com-37, pp. 1813-1825, Dec. 1989.