Fonction de noyau de chaleur pour les graphes de Reeb de maillages 3D

R. El Khoury J-P. Vandeborre M. Daoudi
Institut Telecom ; Telecom Lille1, France
LIFL (UMR 8022 Lille1/CNRS), Université de Lille, France
{rachid.elkhoury, vandeborre, mohamed.daoudi}@telecom-lille1.eu

Résumé

L'analyse des modèles 3D joue un rôle important dans de nombreuses applications. Dans cet article, nous présenterons une approche pour l'extraction de graphe de Reeb de maillages 3D en définissant une nouvelle fonction d'application. Notre fonction d'application calcule une valeur réelle pour chaque sommet décrivant la structure topologique du modèle 3D. Nous effectuons des contours discrets pour chaque sommet selon notre fonction d'application. Les changements topologiques sont détectés par l'analyse des contours discrets pour construire le graphe de Reeb. Notre fonction d'application possède des propriétés importantes : elle est invariante à des transformations rigides et non rigides, elle est insensible au bruit, elle est robuste à des petits changements topologiques et elle ne dépend pas de paramètres. En construisant les graphes de Reeb les propriétés de cette fonction montrent les parties significatives d'un modèle 3D. Nous limitons les critères d'évaluation aux propriétés de notre fonction que nous comparons à celles utilisées dans l'état de l'art. Finalement, nous présentons les graphes de Reeb extraits sur différents modèles 3D en différentes positions.

Mots clefs

Graphe de Reeb, fonction d'application, distance de diffusion, distance *commute-time* , Laplace-Beltrami, contours discrets.

1 Introduction

Le développement de technologies 3D récentes a entraîné l'apparition de multiples applications qui utilisent des données 3D dans plusieurs domaines. Ces données sont souvent représentées par des maillages de polygones. Les graphes topologiques sont utilisés dans de nombreuses applications telles que la segmentation [1], l'indexation [2], la paramétrisation des surfaces [3], etc...

Nous avons travaillé sur une approche basée sur les graphes de Reeb en définissant une nouvelle fonction d'application. Cette dernière doit respecter les propriétés suivantes : elle doit être invariante aux transformations rigides et non rigides, elle doit décrire le modèle 3D, elle doit être insensible au bruit, elle doit être robuste aux changements topologiques et elle ne doit pas dépendre de paramètres. Les méthodes actuelles, quand à elles, ne respectent pas toutes ces propriétés [4]. Pour atteindre cet objective et calculer le graphe de Reeb d'un maillage 3D, nous avons défini une fonction d'application basée sur les distances de diffusion [5]et *commute-time* [6].

Cet article définit une nouvelle fonction d'application qui sera ensuite utilisée pour construire les graphes de Reeb pour differents modèles 3D. Tout d'abord, notre méthode commence par la détection des points caractéristiques (se trouvant aux extrémités du modèle 3D). Ces points caractéristiques sont extraits en utilisant la distance de diffusion qui dépend d'une variable temporelle t. En fixant une valeur élevée de la variable temporelle t, les propriétés globales sont détectées et les deux points les plus éloignés (de sens de la distance de diffusion) sont calculés. A partir ces deux points, en fixant une petite valeur pour la variable temporelle t, nous calculons la distance de diffusion locale maximale (le sommet dont tous les voisins directs ont une valeur de fonction inférieure) pour détecter tous les points caractéristiques. Cette combinaison de propriétés locales et globales pour extraire les points caractéristiques donne de bons résultats sur différents modèles 3D et sous différentes transformations rigides et non rigides.

Puis, nous avons utilisé ces points caractéristiques comme origines pour définir la fonction d'application en calculant, pour chaque point du maillage, la distance *commute-time* au point caractéristique le plus proche.

Ensuite, nous avons analysé les contours discrets créés en chaque point du maillage pour détecter les changements topologiques et construire le graphe de Reeb du maillage.

Finalement, avant de conclure et pour prouver l'efficacité de notre approche, nous avons appliqué notre fonction sur plusieurs modèles 3D de différents types dans des positions différentes.

2 Fonction scalaire sur les surfaces

Plusieurs approches ont été développées pour analyser la structure topologique d'un modèle 3D. Mais, les approches traditionnelles de segmentation d'un modèle 3D et l'extraction de squelette ne sont pas clairement définies afin de préserver les propriétés topologiques d'un modèle 3D face à la théorie de graphe de Reeb. Notre méthode propose une solution à la définition d'une fonction scalaire appropriée qui respecte la stabilité et les propriétés d'invariance. Nous nous sommes concentrés sur les méthodes existantes dans l'état de l'art qui traitent ce problème.

La fonction scalaire $f : S \mapsto \Re$ est définie par une valeur réelle pour chaque sommet d'un maillage polygonal. Dans la littérature, l'utilisation d'une fonction scalaire sur des surfaces polygonales est un outil important pour analyser les modèles 3D pour différents objectifs : structure topologique d'un modèle 3D [7], modelisation et codage de surface [8], l'analyse moléculaire [9] et la construction du graphe de Reeb [10, 11, 12], etc.

La fonction de hauteur a d'abord été appliquée par Shinagawa et Kunii [13] et est un exemple simple pour comprendre le graphe de Reeb. La plupart des méthodes définissent la fonction scalaire basée sur la distance géodésique (le plus court chemin entre les sommets) [11, 1, 2]. Ces fonctions sont très sensibles aux changements topologiques.

Mortara et Patané [14] extraient les points caractéristiques dans lesquels les courbures gaussiennes sont dépendantes d'un certain seuil. L'inconvénient de cette méthode apparaît lors de l'utilisation des surfaces de courbures constantes.

Gebal et al [10] ont défini la fonction d'autodiffusion comme dépendante d'une variable temporelle dans le but de gérer les différents niveaux de détails. Cette fonction calcule la chaleur restante sur chaque sommet après un temps t. Elle est basée sur le noyau de la chaleur, qui dépend de valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur Laplace-Beltrami. Pour son application, les auteurs discrétisent l'opérateur en utilisant le poids cotangente [15, 16] qui minimise l'énergie de Dirichlet. Cette discrétisation peut créer des maxima locaux incorrects en raison des valeurs négatives de la pondération géométrique.

Tierny et al [11] détectent les deux points caractéristiques les plus éloignés (au sens de la distance géodésique) sur le maillage qu'ils utilisent comme origines pour calculer deux ensembles locaux maximaux. L'intersection de ces deux ensembles élimine les points caractéristiques indésirables. Puis, les auteurs définissent la fonction scalaire en se basant sur la distance géodésique minimale de chaque sommet vers l'ensemble des points caractéristiques. Cette méthode est très sensible aux changements topologiques.

3 Graphe de Reeb

Le graphe de Reeb [17] décrit la structure topologique qui encode la connectivité de ses courbes de niveaux basées sur les points critiques d'une fonction scalaire. Soit S une variété compacte. Dans l'espace continu, le graphe de Reeb d'une fonction réelle f est l'espace quotient de f dans $S \times \Re$, par la relation d'équivalence "$\sim$" définie par $(v_i, f(v_i) \sim (v_j, f(v_j))$ si et seulement si $f(v_i) = f(v_j)$ et v_i, v_j appartiennent à la même composante connexe de $f^{-1}(f(v_i))$. Autrement dit, tous les points ayant la même valeur dans f sont représentés par un seul élément dans le graphe de Reeb. La figure 1 illustre le graphe de Reeb sur un corps humain et sur un modèle 3D de genre 3 en utilisant la fonction hauteur $f(v_i) = z_i$ où z_i est la coordonnée z du sommet v_i.

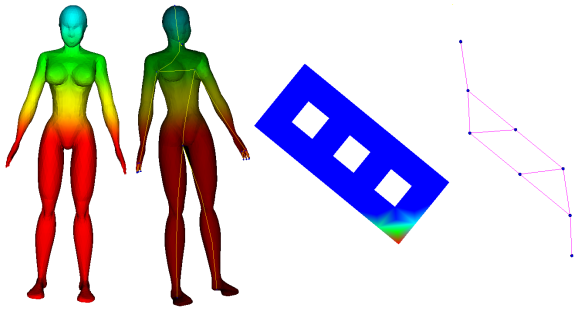


Figure 1 – *Le graphe de Reeb sur un corps humain et sur un modèle 3D de genre 3 en utilisant la fonction hauteur.*

4 Distance de diffusion et *commute-time*

La distance de diffusion est une métrique [5] définie en utilisant les noyaux de la chaleur.

$$d_S(t, x, y) = \|K(t, x, z) - K(t, y, z)\|_{L_2(S)} \qquad (1)$$

Sous forme spectrale :

$$d_S(t, x, y)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\lambda_i t}(\psi_i(x) - \psi_i(y))^2 \qquad (2)$$

La distance de diffusion $d_s(t, x, y)$ entre deux sommets (x, y) sur la surface S mesure la connectivité des chemins de longueur de la variable temporelle t qui relient (x, y). Pour les petites valeurs de la variable t, la distance de diffusion dépend de l'information locale. Ceci est dû a l'absence de la propagation significative de la diffusion. La figure 2 montre la diffusion du sommet qui se trouve au sommet de la tête au cours du temps.

La distance *commute-time* est définie comme étant similaire à la distance de diffusion. Mais, la distance *commute-time* prend en considération tous les chemins reliant deux sommets dans le graphe et non seulement les chemins de longueur t [18].

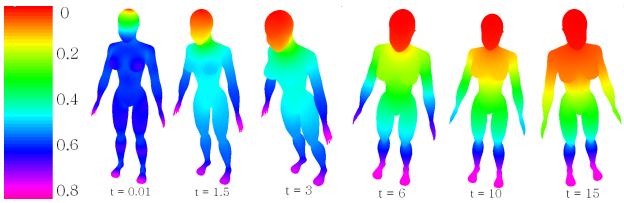


Figure 2 – *La diffusion du sommet qui se trouve sur la tête au cours du temps.*

5 Construction et propriétés de la fonction d'application

Pour calculer le graphe de Reeb d'un modèle 3D, nous devons définir une fonction d'application appropriée. Cette

fonction doit respecter les propriétés de stabilité et d'invariance dans le but de mettre en évidence les parties les plus significatives d'un modèle 3D. Pour définir notre fonction d'application, nous extrayons tout d'abord les points caractéristiques. Ensuite, la fonction d'application est calculée en fonction de ces points caractéristiques. Enfin, on applique sur la fonction d'application une stratégie de perturbation pour transformer la fonction d'application en une fonction de Morse.

5.1 Extraction des points caractéristiques

Les sommets situés sur les extrémités du modèle sont les points caractéristiques qui seront utilisés comme origines de notre fonction d'application. Dans la littérature, de nombreuses techniques ont été proposées pour détecter les points caractéristiques [19, 11, 10]. La fonction proposée par Guebal et al [10] détecte automatiquement les points caractéristiques puisque la quantité de chaleur restant dans un intervalle de temps défini sera plus élevée sur les extrémités ou proches d'eux. Selon nos expériences, cette fonction génère des points caractéristiques indésirables. Tierny et al [11] proposent une méthode d'analyse croisée en utilisant deux fonctions géodésiques. Cet algorithme produit des points caractéristiques bien localisés mais très sensibles aux changements topologiques. Notre méthode est inspirée de Tierny et al [11], en se basant sur la distance de diffusion et en fixant la variable temporelle t à une grande valeur. Les propriétés globales sont détectées et les deux points caractéristiques V_1 et V_2 les plus éloignés sont calculés. Ces deux points sont utilisés comme origines d'une fonction scalaire définie comme suit :

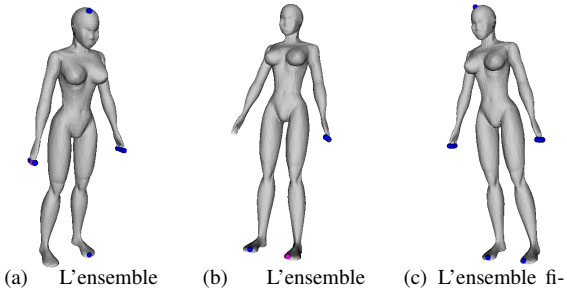
$$f_{V_1}(v,t) = d_S(t,v,V_1)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\lambda_i t}(\psi_i(v) - \psi_i(V_1))^2 \tag{3}$$

$$f_{V_2}(v,t) = d_S(t,v,V_2)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\lambda_i t}(\psi_i(v) - \psi_i(V_2))^2 \tag{4}$$

Où V_1 et V_2 sont les points les plus éloignés. Puis, nous fixons la variable temporelle t à une petite valeur pour détecter les propriétés locales et nous calculons les minima locaux (sommets dont tous les voisins directs ont une valeur de fonction supérieure). Soit S_1 et S_2 l'ensemble des minima locaux de f_{V_1} et f_{v_2} respectivement (voir figure 3(a) et figure 3(b)). Finalement, l'ensemble des points caractéristiques est l'union de S_1 et S_2 présentés dans la figure 3(c). Cette combinaison de propriétés locales et globales pour extraire les points caractéristiques donne de bons résultats sur les différents modèles 3D sous différentes transformations rigides et non rigides (voir figure 4)

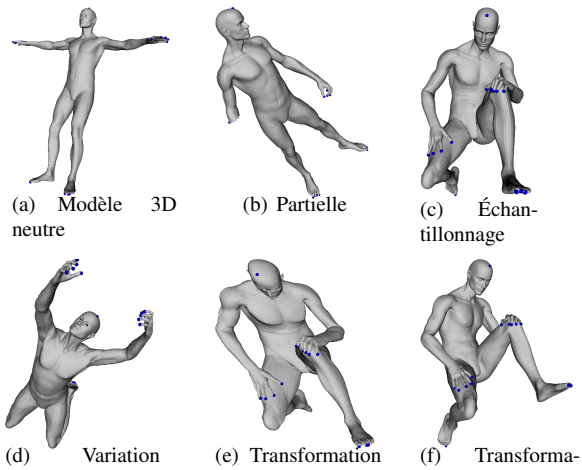
5.2 Définition de la fonction d'application

Le concept de la fonction d'application est de révéler les parties les plus significatives du modèle 3D. Tierny et al[11] définissent une fonction qui calcule pour chaque



(a) L'ensemble des minima locaux de f_{V_1} (b) L'ensemble des minima locaux de f_{V_2} (c) L'ensemble final des sommets caractéristiques. $= V_1 \cup V_2$

Figure 3 – *Extraction des sommets caractéristiques.3(a) et 3(b) présentent l'ensemble des minima locaux de f_{V_1} et f_{V_2} respectivement et 3(c) présente l'ensemble final des sommets caractéristiques.*



(a) Modèle 3D neutre (b) Partielle (c) Échantillonnage (d) Variation d'échelle (e) Transformation affine (f) Transformation isométrique

Figure 4 – *Extraction de points caractéristiques sur un modèle 3D sous différentes transformations rigides et non rigides.*

sommet v la distance géodésique au point caractéristique le plus proche. Cette fonction ne gère pas les petits changements topologiques et elle est très sensible au bruit. La distance *commute-time* prend en considération tous les chemins reliant deux sommets. Alors, un petit changement topologique n'affecte pas considérablement les résultats. En se basant sur cette distance, nous définissons notre fonction d'application F_m qui calcule pour chaque sommet v la distance *commute-time* au point caractéristique le plus proche.

$$F_m(v) = max(dc_S(v, V_i), i = 1..nb_{V_i})) \tag{5}$$

où V_i est le i^{me} sommet et nb_{V_i} est le nombre de sommets. La fonction d'application est définie par la distance *commute-time*. Elle est calculée en utilisant les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-

Beltrami. Elle peut être vue comme une fonction scalaire globale lisse afin de gérer des données bruitées. Pour les variations d'échelle uniforme, nous avons normalisé le spectre (valeurs propres) du maillage. La fonction d'application est définie comme étant dépendante uniquement de la structure du maillage. Cela rend la fonction robuste à l'invariance isométrique.
Nous avons utilisé une stratégie de perturbation pour que la fonction d'application prenne des valeurs distinctes à chaque sommet du maillage. Cela garantit des valeurs distinctes de la fonction sur les points critiques et transforme les points critiques dégénérés en points critiques non dégénérés (voir figure 5).

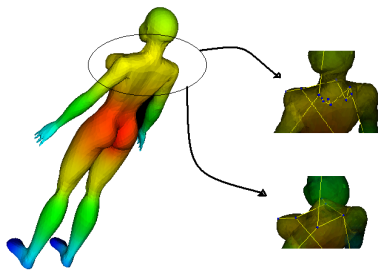


Figure 5 – *La fonction d'application (en haut à gauche). La fonction de Morse après avoir appliqué la stratégie de perturbation pour transformer les points critiques dégénérés en points non dégénérés (en bas à gauche).*

6 Graphe de Reeb et l'analyse topologique du maillage

Après le calcul de la fonction de Morse dans la section 5.2, nous utilisons cette fonction définie pour générer les courbes de niveau [20]. Elles sont définies par la relation d'équivalence dans la section 3. Nous les analysons pour définir quatre types de changements topologiques : le point de départ qui correspond à la valeur minimale de la fonction de Morse (centre du modèle 3D),la bifurcation est détectée lorsque la courbe de niveau est divisée en plusieurs, la jonction est détectée lorsque plusieurs courbes sont fusionnées en une seule et le point de terminaison. Les points critiques sont créés dans chaque itération où l'on détecte un changement topologique. Ces points critiques et leurs connexions correspondent à des points et des arêtes du graphe de Reeb.

7 Implémentation de la méthode

Dans l'espace discret, pour formuler la distance de diffusion et la distance *commute-time*, nous avons besoin de discrétiser l'opérateur de Laplace-Beltrami et de calculer les fonctions propres et les valeurs propres.
En pratique, nous avons numériquement calculé les fonctions propres et les valeurs propres en utilisant la discrétisation proposée par Meyer et al[21]. Nous résolvons le problème généralisé en utilisant la method *Implicitly Restarted Arnoldi* implémentée dans MATLAB.
Nous définissons la base de dimension 50 liée aux fonctions propres des 50 plus petites valeurs propres. Les 50 premières valeurs propres sont suffisantes pour détecter les détails et assez lisses pour éliminer le bruit de la surface.
Pour extraire les points caractéristiques décrits dans la section 5.1, la distance de diffusion est estimée en fixant une valeur élevée de la variable temporelle t pour détecter les deux points caractéristiques les plus éloignés. Puis elle est estimée en fixant une petite valeur de la variable temporelle t. Pour les petites valeurs de t variant entre $[1, 2]$, la diffusion se propage de manière significative pour détecter les propriétés locales. Pour une grande valeur de $t > 15$, la distance de diffusion reste presque inchangée. Nous l'avons fixée à 20.
Les expériences et les résultats de graphes de Reeb sur divers modèles 3D sont générés en utilisant la boîte à outils de visualisation (VTK).

8 Résultats expérimentaux

Nous avons évalué notre méthode sur les surfaces triangulaires et nous avons abordé trois points : des expériences sur notre fonction d'application, des exemples sur différents types de modèles 3D, y compris les modèles partiaux et combinés, et finalement nous avons prouvé la robustesse aux changements topologiques.

8.1 Les expériences sur notre fonction d'application

Notre fonction d'application exprime la robustesse pour les différentes position d'un modèle 3D . Dans la figure 8.1, les mêmes couleurs ont été affectées aux régions correspondantes. La variation du rouge au bleu exprime les valeurs croissantes de la fonction d'application. Cette dernière ne dépend pas d'un paramètre qui gère le niveau de détails. Elle décrit les détails locaux et les détails globaux comme le montre la figure 7(f). À titre d'exemple, les doigts et le dos du chameau sont détectés. La fonction autodiffusion définie par Gebal et al [10] dépend d'un paramètre qui permet de gérer le niveau de détails. Pour une grande valeur de la variable temporelle t, l'autodiffusion décrit les détails globaux du modèle sans considérer les petits détails. Pour une petite valeur de la variable temporelle t, la fonction autodiffusion détecte tous les détails mais aussi ceux qui vont conduire à créer des branches indésirables dans le graphe de Reeb.
La perturbation de notre graphe de Reeb est due à deux raisons. Tout d'abord, les valeurs scalaires basées sur la fonction d'application sur chaque sommet et ses voisins sont très proches ou presque similaires. Ces valeurs dépendent d'une variation autour de 10^{-20} ce qui conduit a une bifurcation de changer la direction. Dans la figure 8(d), la connexion entre le sein droit et l'épaule droite a changé à l'épaule gauche. Après la stratégie de perturbation, la fonction de Morse prend en considération le nombre de som-

mets à trier. Cela conduit à détecter des bifurcations ou des jonctions dans la construction du graphe de Reeb. On peut le remarquer au niveau de la poitrine de l'homme dans la figure 6(j).

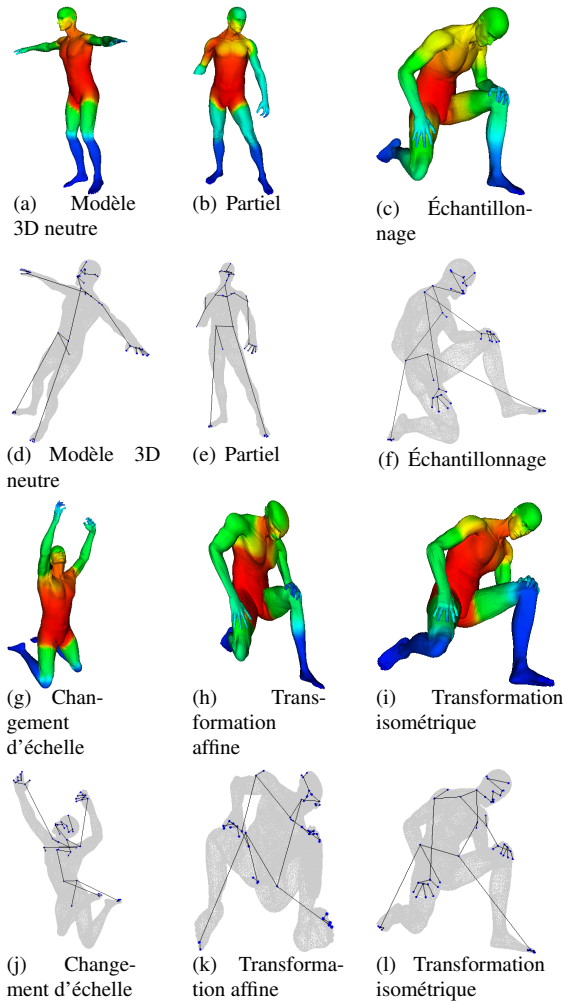


Figure 6 – *Les figures (a)(b)(c)(g)(h)(i) montrent la robustesse de la fonction d'application pour les différentes positions d'un modèle 3D. La variation des couleurs du rouge au bleu exprime les valeurs croissantes de la fonction d'application. Les figures (d)(e)(f)(j)(k)(l) montrent le graphe de Reeb correspondant à la fonction d'application.*

8.2 Exemples sur différents types de modèles 3D

Nous avons testé notre méthode sur différents types de modèles 3D, y compris des modèles 3D partiaux ou bien combinés avec d'autres modèles. Les figure 6(a) et figure 6(b) montrent la robustesse de notre fonction d'application qui mène à un graphe de Reeb stable. Le graphe de Reeb d'un modèle 3D partiel (figure 6(e)) comprend le graphe de Reeb de son modèle 3D neutre (figure 6(d)). La figure 7 montre des exemples de notre méthode appliquée sur des modèles 3D avec les transformations rigides et non rigides.

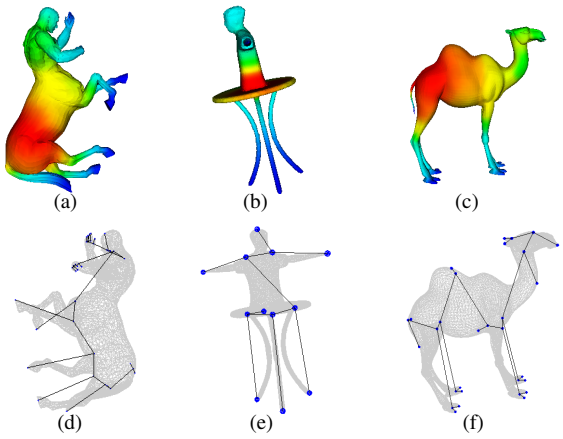


Figure 7 – *Le graphe de Reeb pour les différents types de modèles 3D.*

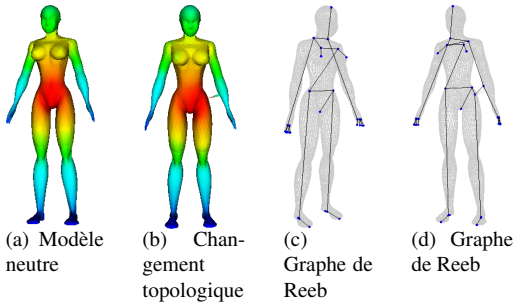


Figure 8 – *La robustesse envers un changement topologique. Le graphe de Reeb subit un changement local pour décrire le genre créé envers ce changement topologique et non pas un changement globale.*

8.3 La robustesse envers les changements topologiques

La figure 8.2 montre la robustesse de la fonction d'application envers un petit changement topologique. Les couleurs restent les mêmes après l'ajout d'un changement topologique reliant la hanche et la main dans la figure8(b). Cela prouve l'invariance de notre fonction d'application envers un changement topologique. Ceci est dù à la distance *commute-time* qui prend en considération tous les chemins reliant les sommets. Si nous appliquons une fonction basée sur la distance géodésique, comme celle définie par Tierny et al [22], le graphe de Reeb subit un changement globale. tandis qu'en utilisant notre fonction, le graphe de Reeb subit le changement local pour décrire le genre créé malgré ce changement topologique.

9 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une nouvelle fonction d'application basée sur le *heat kernel* pour extraire le graphe de Reeb d'un modèle 3D maillé. Cette nouvelle fonction donne une représentation fidèle de la structure globale d'un modèle 3D quelles que soient les transformations appliquées (rigides ou non, bruit, changement topologique, etc.) Dans la suite de notre travail, nous allons utiliser les graphes ainsi obtenus pour indexer des collections de maillages 3D présentant différentes poses et transformations.

Références

[1] A. Shamir. A formulation of boundary mesh segmentation. Dans *Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission. Proceedings*, September 2004.

[2] Masaki Hilaga, Yoshihisa Shinagawa, Taku Kohmura, et Tosiyasu L. Kunii. Topology matching for fully automatic similarity estimation of 3d shapes. SIGGRAPH '01, pages 203–212. ACM, 2001.

[3] Dvir Steiner et Anath Fischer. Cutting 3d freeform objects with genus-n into single boundary surfaces using topological graphs. Dans *Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 336–343, 2002.

[4] S. Biasotti, S. Marini, M. Mortara, et G. Patane. An overview on properties and efficacy of topological skeletons in shape modeling. Dans *Shape Modeling International*, pages 245 – 254, May 2003.

[5] R. R. Coifman, S. Lafon, A. B. Lee, M. Maggioni, B. Nadler, F. Warner, et S. W. Zucker. Geometric diffusions as a tool for harmonic analysis and structure definition of data : Diffusion maps. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 102(21) :7426–7431, 2005.

[6] François Fouss, Alain Pirotte, Jean-Michel Renders, et Marco Saerens. Random-walk computation of similarities between nodes of a graph, with application to collaborative recommendation. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 19, 2006.

[7] Xinlai Ni, Michael Garland, et John C. Hart. Fair morse functions for extracting the topological structure of a surface mesh. *ACM Trans. Graph.*, 23 :613–622, August 2004.

[8] Y. Shinagawa, T.L. Kunii, et Y.L. Kergosien. Surface coding based on morse theory. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(5), September 1991.

[9] Peer-Timo Bremer, Herbert Edelsbrunner, Bernd Hamann, et Valerio Pascucci. A topological hierarchy for functions on triangulated surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10, 2004.

[10] Katarzyna Gebal, Jakob Andreas Bærentzen, Henrik Aanæs, et Rasmus Larsen. Shape analysis using the auto diffusion function. *Computer Graphics Forum*, pages 1405–1413, 2009.

[11] Julien Tierny, Jean P. Vandeborre, et Mohamed Daoudi. 3d Mesh Skeleton Extraction Using Topological and Geometrical Analyses. Dans *14th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (Pacific Graphics 2006)*, pages 85–94, Taipei, Taiwan, 2006.

[12] Kree Cole-McLaughlin, Herbert Edelsbrunner, John Harer, Vijay Natarajan, et Valerio Pascucci. Loops in reeb graphs of 2-manifolds. *Discrete Comput. Geom.*, 32 :231–244, July 2004.

[13] Y. Shinagawa et T.L. Kunii. Constructing a reeb graph automatically from cross sections. *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 11(6) :44 –51, nov 1991.

[14] M. Mortara et G. Patane. Affine-invariant skeleton of 3d shapes. Dans *Shape Modeling International.*, 2002.

[15] Alexander M. Bronstein, Michael M. Bronstein, Leonidas J. Guibas, et Maks Ovsjanikov. Shape google : Geometric words and expressions for invariant shape retrieval. *ACM Trans. Graph.*, 30, Février 2011.

[16] Ulrich Pinkall, Strasse Des Juni, et Konrad Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experimental Mathematics*, 2 :15–36, 1993.

[17] Georges Reeb. Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique. *Comptes Rendus Acad. Sciences*, 222, 1946.

[18] Huaijun Qiu et E.R. Hancock. Clustering and embedding using commute times. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(11) :1873 –1890, November 2007.

[19] Sagi Katz, George Leifman, et Ayellet Tal. Mesh segmentation using feature point and core extraction. *The Visual Computer*, 21, 2005.

[20] Valerio Pascucci, Giorgio Scorzelli, Peer-Timo Bremer, et Ajith Mascarenhas. Robust on-line computation of reeb graphs : simplicity and speed. *ACM Trans. Graph.*, 2007.

[21] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, et Alan H. Barr. Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds. Dans *VisMath '02*, Berlin, Germany, 2002.

[22] J. Tierny, J.-P. Vandeborre, et M. Daoudi. Fast and precise kinematic skeleton extraction of 3d dynamic meshes. Dans *19th International Conference on Pattern Recognition*, pages 1 –4, December 2008.